تصحيح ... 1

الدورة II

التمرين II : ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$.

① لنبين أن:

$$(\forall x\in\mathbb{R}): \sin^{2n+1}x = \sum_{k=0}^{n} C_n^k(-1)^k \sin x\cos^{2k}x$$

لدينا:

$$\sin^{2n+1}x = \sin x(\sin^2 x)^n$$

$$= \sin x(1-\cos^2x)^n$$

$$= \sin x\sum_{k=0}^{n} C_n^k(-\cos^2 x)^k$$

$$= \sin x \sum_{0}^{n} C_n^k(-1)^k\cdot\cos^{2k}x$$

وبالتالي:

$$(\forall x\in\mathbb{R}) \quad \boxed{\sin^{2n+1}x = \sum_{0}^{n} C_n^k(-1)^k\sin x\cos^{2k}x}$$

(2) حساب التكامل I_k لكل k من $\mathbb{N}$:

لدينا:

$$I_k=\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \sin t\cos^{2k}t\,dt$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} -\cos' t\cdot\cos^{2k}t\,dt$$

$$= \left[-\frac{\cos^{2k+1}t}{2k+1}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{x}$$

$$= \frac{-\cos^{2k+1}x}{2k+1}$$

وعليه فإن:

$$(\forall k\in\mathbb{N}); \quad \boxed{I_k = \frac{-\cos^{2k+1}x}{2k+1}}$$

(3) استنتاج التكامل المقترح:

لدينا:

$$I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \sin^{2n+1}t\,dt$$

وحسب السؤال السابق (1) فإن:

$$(\forall t\in\mathbb{R}); \sin^{2n+1}t = \sum_{0}^{n} C_n^k(-1)^k\sin x\cdot\cos^{2k}x$$

وبالتالي:

$$I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \sin^{2n+1}t\,dt = \sum_{k=0}^{n} C_n^k(-1)^k\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \sin t\cos^{2k}t\,dt$$

وحسب السؤال (2) نجد أن:

$$I=\sum_{0}^{n} C_n^k(-1)^k\cdot\frac{-\cos^{2k+1}x}{2k+1}$$

إذن:

$$\boxed{I=-\sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k(-1)^k}{2k+1}\cdot\cos^{2k+1}x}$$

التمرين III :

ليكن n من $\mathbb{N}^*$. ونضع:

$$\begin{cases} u_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \\ u_n=\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x^2}\,dx \end{cases}$$

① حساب u_0:

لدينا:

$$u_0=\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$=\int_0^1 (\operatorname{Arctg} x)'\,dx$$

$$=\left[\operatorname{Arctg} x\right]_0^1$$

$$\boxed{u_0=\frac{\pi}{4}}$$

② نبين أن: $(\forall n\in\mathbb{N}); u_{n+1}+u_n=\frac{1}{2n+1}$

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}^*$.

لدينا:

$$u_{n+1}+u_n=\int_0^1\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\,dx+\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x^2}\,dx$$

$$=\int_0^1\frac{x^{2n+2}+x^{2n}}{1+x^2}\,dx$$

$$=\int_0^1\frac{x^{2n}(1+x^2)}{(1+x^2)}\,dx$$

$$=\int_0^1 x^{2n}\,dx$$

$$=\left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1$$

وبالتالي:

$$(\forall n\in\mathbb{N}); \quad \boxed{u_{n+1}+u_n=\frac{1}{2n+1}}$$

قيمة u_1 :

حسب النتيجة السابقة : $u_1 + u_0 = \frac{1}{2\times 0+1}$

أي أن : $u_1 = \frac{1}{1} - u_0$

إذن : $\boxed{u_1 = 1 - \frac{\pi}{4}}$

و $u_2 + u_1 = \frac{1}{2\times 1+1}$

بمعنى أن : $u_2 = \frac{1}{3} - u_1$

$= \frac{1}{3} - 1 + \frac{\pi}{4}$

وبالتالي : $\boxed{u_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}}$

③ نبين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*) : 0 < u_n < \frac{1}{2n+1}$

$(\forall x\in]0,1])$ $1+x>1$

و $x^{2n}>0$

$\Leftarrow$ $\frac{x^{2n}}{1+x}>0$

أي : $\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}dx>0$

وعليه $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ ① $u_n>0$

ومنه نستنتج أن : $u_{n+1}>0$

أي : $u_n+u_{n+1}>u_n$

وعليه : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; ② $u_n < \frac{1}{2n+1}$

من العلاقتين ① و ② يكون

لدينا : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $\boxed{0<u_n<\frac{1}{2n+1}}$

وبما أن $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n+1}=0$

فإن : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

$(V_n)_n$ المتتالية بحيث :

$$V_n=\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

أ- نبين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}) : \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} = \frac{1+(-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2}$

لدينا : $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} = 1 - x^2 + x^{4} + \dots + (-1)^n x^{2n}$

$$= \frac{1+(-1)^n x^{2n+2}}{1-(-x^2)}$$

$$\boxed{\sum_{0}^{n} (-1)^k x^{2k} = \frac{1+(-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2}} \; ; n\in\mathbb{N}$$

ب- تقارب المتتالية $(V_n)_n$ ونهايتها :

لدينا : $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} = \frac{1+(-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2}$

ومنه : $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 x^{2k}dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^1 (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = u_0 + (-1)^n u_{n+1}$$

مع العلم أن : $\int_0^1 x^{2k}dx = \left[\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2k+1}$

وعليه : $V_n = u_0 + (-1)^n u_{n+1}$

$= \frac{\pi}{4} + (-1)^n u_{n+1}$

وبما أن : $\forall n\in\mathbb{N}$ $0<u_{n+1}<\frac{1}{2n+3}$

فإن : $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = 0$

وعليه فإن $(V_n)_n$ متقاربة و :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} V_n = \frac{\pi}{4}}$$

التمرين III :

(I) لتكن f الدالة بحيث:

$$f(x)=\frac{e^x}{1+x^2}$$

1) أ- حساب النهايات المطلوبة:

لدينا $\lim_{+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1+x^2}$

$$=\lim_{+\infty}\frac{\frac{e^x}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+1}$$

$$=+\infty$$

$\left[\lim_{+\infty}\frac{e^x}{x^2}=+\infty \quad \text{لأن}\right]$

ولدينا

$$\lim_{-\infty}\frac{e^x}{1+x^2}=0$$

$\left[\begin{array}{ll}\lim_{-\infty} e^x=0 & \text{لأن}\\ \lim_{-\infty} 1+x^2=+\infty & \text{و}\end{array}\right]$

ب- الفرع اللانهائي ل (C) بجوار $+\infty$:

لدينا $\lim_{+\infty} f(x)=+\infty$

ولدينا $\lim_{+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{+\infty}\frac{e^x}{(x^2+1)x}$

يعني $=\lim_{+\infty}\frac{e^x}{x^3+x}$

إذن $=\lim_{+\infty}\frac{e^x/x^3}{1+\frac{1}{x^2}}$

ومنه $=+\infty$

$\left[\lim_{+\infty}\frac{e^x}{x^3}=+\infty \quad \text{لأن}\right]$

إذن (C) يقبل محور الأراتيب كاتجاه مقارب بجوار $+\infty$.

2- حساب $f'(x)$ ودراسة تغيرات الدالة f:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

و $(\forall x\in\mathbb{R})$: $f'(x)=\frac{(1+x^2)e^x-2xe^x}{(1+x^2)^2}$

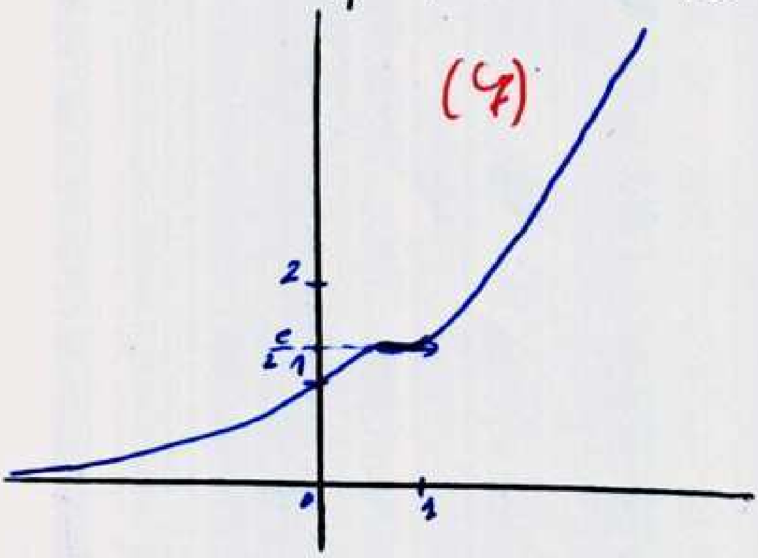
$$=\frac{e^x+x^2e^x-2xe^x}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{e^x(1+x^2-2x)}{(1+x^2)^2}$$

$$=\frac{(x-1)^2\cdot e^x}{(1+x^2)^2}\geq 0$$

إذن f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.

3) منحنى الدالة f:



(II) نعتبر الدالة F للمتغير الحقيقي x بحيث:

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

1) أ- نبين أن: $(\forall x>0)(\forall t\in[0,x])\ ;\ f(t)\geq\frac{e^t}{1+x^2}$

$(\forall t\in[0,x])\ ;\quad 1+t^2\leq 1+x^2$

أي أن $\frac{1}{1+t^2}\geq\frac{1}{1+x^2}$

ومنه $\frac{e^t}{1+t^2}\geq\frac{e^t}{1+x^2}$

وعليه $\begin{pmatrix}\forall t\in[0,x]\\ x>0\end{pmatrix};\ \boxed{f(t)\geq\frac{e^t}{1+x^2}}$

ب- نستنتج أن:

$(\forall x>0): F(x)\geq f(x)-\frac{1}{1+x^2}$

حسب الجزء (أ) من السؤال (1) لدينا

$\begin{pmatrix}\forall x>0\\ \forall t\in[0,x]\end{pmatrix}: f(t)\geq\frac{e^t}{1+x^2}$

ومنه $(x>0)\ \int_0^x f(t)dt\geq\int_0^x\frac{e^t}{1+x^2}dt$

يعني أن:

$$F(x) \geq \frac{1}{1+x^2}\cdot\left[e^x\right]_0^x$$

$$F(x) \geq \frac{e^x}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}$$

وعليه: $(\forall x>0)$

$$\left\{F(x) \geq f(x) - \frac{1}{1+x^2}\right\}$$

وبما أن:
$$\begin{cases} \lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{+\infty} \dfrac{1}{1+x^2} = 0 \end{cases}$$
و

فإن:

$$\boxed{\lim_{+\infty} F(x) = +\infty}$$

2 - الفرع اللانهائي للمنحنى (Γ) عند $+\infty$:

لدينا: $\forall x>0$: $F(x) \geq f(x) - \dfrac{1}{1+x^2}$

ومنه: $\dfrac{F(x)}{x} \geq \dfrac{f(x)}{x} - \dfrac{1}{x+x^3}$

وبما أن:
$$\begin{cases} \lim\limits_{+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{+\infty} \dfrac{1}{x^3+x} = 0 \end{cases}$$
و

فإن: $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{F(x)}{x} = +\infty$

وهذا يعني أن (Γ) له فرع شلجمي باتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$.

3) رتابة الدالة F:

لدينا $t \mapsto f(t)$ متصلة على $\mathbb{R}$.

إذن فهي تقبل دالة أصلية Φ معرفة على $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ $F(x) = \Phi(x) - \Phi(0)$

وبما أن $\Phi(x)$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

فإن F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

و $(\forall x \in \mathbb{R})$: $F'(x) = \Phi'(x)$
$$= f(x) > 0$$

ومنه F تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.

أ) لنبين أن: $(\forall x<0)$ $F(x) \geq \operatorname{Arctg} x$

نعتبر من أجل ذلك الدالة φ المعرفة كما يلي:

$$(\forall x \in]-\infty,0]) : \varphi(x) = F(x) - \operatorname{Arctg} x$$

لدينا φ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^-$.

و $(\forall x \in \mathbb{R}^-)$: $\varphi'(x) = F'(x) - \operatorname{Arctg}'(x)$

يعني أن:
$$= f(x) - \frac{1}{1+x^2}$$

إذن: $\forall x \leq 0$ $\varphi'(x) = \dfrac{e^x - 1}{1+x^2}$

وبما أن: $x<0$ أي $e^x < 1$

فإن $\varphi'(x) \leq 0$. وهذا يعني أن φ تناقصية قطعا على $]-\infty,0[$.

ومنه

$$(\forall x<0) \Rightarrow \varphi(x) \geq \varphi(0) = 0$$

$$F(x) - \operatorname{Arctg} x \geq 0$$

$(\forall x<0)$ $\boxed{F(x) \geq \operatorname{Arctg} x}$

ب - نقبل أن F لها نهاية ℓ عند $-\infty$: نبين أن $-\frac{\pi}{2} \leq \ell < 0$

لدينا: $(\forall x \in \mathbb{R})$: $f(x) > 0$

$\Leftarrow$ $(x<0)$; $\int_0^x f(t)\,dt \leq 0$

أي: $\boxed{F(x) \leq 0}$

إذن: $(\forall x<0)$; $\operatorname{Arctg} x \leq F(x) < 0$

وعليه: $\lim\limits_{-\infty} \operatorname{Arctg} x \leq \lim\limits_{-\infty} F(x) \leq 0$

أي أن: $\lim\limits_{-\infty} \operatorname{Arctg} x \leq \ell \leq 0$

وبما أن: $\lim\limits_{-\infty} \operatorname{Arctg} x = -\frac{\pi}{2}$

فإن:

$$\boxed{-\frac{\pi}{2} \leq \ell < 0}$$

وهذا هو المطلوب.

مع أطيب التمنيات بالنجاح
حسين الإدريسي